

LOGARITMOS

A. DEFINICIONES

La función $y=2^x$ se puede representar gráficamente. Para ello se debe tabular de la siguiente forma.

X	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$Y=2^x$	0	.0625	.125	.25	.5	1	2	4	8

La gráfica sería esta:

El número 2 que se ha elevado a las diferentes potencias se denomina **BASE**, los valores que toma “X” son el **LOGARITMO** de los valores de “Y”. Así el logaritmo de 1 es 0, y el de 8 es dos.

El logaritmo de un número es, entonces, el exponente a que debe elevarse otro número que llamado base, para que dé el primer número.

B. CONCLUSIONES

1. Los valores de “X” forman una progresión aritmética, mientras que los de “Y” forman una geométrica.
2. “Y” siempre es positivo sin importar el valor del exponente (X).
3. De $-\infty$ a 0 para “X”, a “Y” le corresponde un intervalo que va de 0 a 1.
4. El crecimiento de “X”, a partir de que vale 0, es uniforme. El de “Y” es muy rápido y dada vez mayor.

Como base se puede tomar todo número positivo, exceptuando el 0 y el 1, debido a que $0*0*0=0^3$ siempre vale 0 para cualquier valor del exponente, lo mismo sucede con el número 1 ($1*1*1=1$).

Se puede deducir que:

1. Sólo los números positivos tienen logaritmos, suponiendo que se toma una base también positiva.
2. Todo logaritmo negativo corresponde a un número comprendido entre 0 y 1.
3. El logaritmo de la base siempre vale uno.

C. NOTACIÓN

Un mismo número puede tener varios logaritmos, es el caso de 64:

$$8^2=64; 4^3=64$$

Se debe, entonces, señalar la base: $\text{Log}_8 64$ ó $\text{Log}_4 64$.

D. LOGARITMOS DECIMALES

*Los logaritmos decimales son los que tienen como **BASE** el número 10.*

1 .CARACTERÍSTICA Y MANTISA

Teniendo en cuenta todo lo visto:

$10^0=1$	es decir, $\log 1=0$
$10^1=10$	$\log 10=1$
$10^2=100$	$\log 100=2$
$10^3=1000$	$\log 1000=3$

Lo cual quiere decir que los números comprendidos entre 1 y 10 tienen un logaritmo entre 0 y 1, así los números comprendidos entre 10 y 100, y entre 100 y 1000, lo tienen comprendido entre 1 y 2, y entre 2 y 3, respectivamente.

Resulta, entonces, que:

$\text{Log } 5 = .6990$ y
 $\text{Log } 45 = 1.6532$

El logaritmo de 5 es enteramente decimal, mientras que el de 45 tiene una parte entera y decimal.

La característica de un logaritmo es su parte entera, su mantisa es la parte decimal

Los números que son cuadrado, cubo, etc. de la base son los únicos a los que corresponde un logaritmo completamente entero.

2. CARACTERÍSTICA DE UN NÚMERO MAYOR QUE 1

El logaritmo de un número comprendido entre 1 y 10, es 0; el de uno comprendido entre 10 y 100 es 1; el de uno comprendido entre 100 y 1000, es 2. Concluimos esto:

La característica del logaritmo de un número es igual al número de cifras de éste, menos 1. Así la característica del logaritmo de 6 es 0 y la de 96, es 1.

3. LOGARITMO DE UN NÚMERO MENOR QUE UNO

La base 10 con los primeros cuatro exponentes negativos es la siguiente:

$10^{-4}=0.0001$	es decir, $\text{Log } 0.0001=-4$
$10^{-3}=0.001$	es decir, $\text{Log } 0.001 =-3$
$10^{-2}=0.01$	es decir, $\text{Log } 0.01=-2$
$10^{-1}=0.1$	es decir, $\text{Log } 0.1=-1$
$10^0=1$	es decir, $\text{Log } 1=0$

Concluimos que el logaritmo de un número decimal es negativo. Así el logaritmo de un número comprendido entre 0 y 0.1 está en el intervalo de 0 y -1.

4. TRANSFORMACIÓN DE LOGARITMOS NEGATIVOS

Se puede transformar un logaritmo totalmente negativo en uno que sólo tiene su característica negativa. Para esto se le suma +1 a la mantisa y -1 a la característica

Así para transformar -1.4369 se hace:

$-1.4369 + 1 - 1 = -1 - 1 - 0.4369 + 1 = -2 + 0.5631$, En este último número sólo la característica es negativa.

Pero en vez de escribir $-2 + 0.5631$ se opta por escribir $\bar{2}.5631$ donde la raya superior significa que sólo -2 es negativo.

5. CARACTERÍSTICA DE UN NÚMERO MENOR QUE 1

Los números menores que 0.1 tienen característica igual a -1. A partir de 0.01 su característica es igual a -2. Entonces se concluye:

La característica de los números decimales es igual al número de ceros después de la coma más 1, además es negativa.

6. LOGARITMO DEL NÚMERO 0

El logaritmo de los números decimales es negativo y, además, su valor disminuye conforme tienden a cero. Se puede colegir que el logaritmo del número cero es $-\infty$.

$$10^{-\infty} = 1/10^{\infty} = 0;$$

Por lo tanto: $\text{Log } 0 = -\infty$.

7. LOGARITMOS DE NÚMEROS QUE SÓLO DIFIEREN EN ORDEN DE LAS UNIDADES QUE REPRESENTAN

Considérese el número 5468, cuyo logaritmo es 3.7378.

Se puede escribir esto así:

$$10^{3.7378} = 5438$$

Si ahora se dividen ambos miembros por 10, por 100 y por se tiene:

$$10^{3.7378}/10 = 5438/10. \quad \text{O sea, } 10^{2.7378} = 543.8$$

$$10^{3.7378}/100 = 5438/100. \quad \text{O sea, } 10^{1.7378} = 54.38$$

$$10^{3.7378}/1000 = 5438/1000. \quad \text{O sea, } 10^{0.7378} = 5.438$$

Las mantisas de todos los números son las mismas. Y concluimos:

Las mantisas de números que sólo difieren en el orden de las unidades que representan, son iguales. Lo único que difiere de estos números son sus características. Además tenemos que:

Para determinar el logaritmo de un número decimal se toma éste como si fuera un número entero, después se calcula la característica según su naturaleza

Por ejemplo, para calcular el logaritmo de 0.2558. Primero se calcula el de 2558:

$\text{Log} 2258 = 3.3537$. Se toma la mantisa 0.3537 y se determina su característica según el número de que se trata. Como es decimal, según el número de ceros después de la coma más 1 y se le adiciona el signo negativo. La característica es -1. Y queda:

$$\text{Log } 0.2558 = -1 + 0.3537.$$

8. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. LOGARITMO DE UN PRODUCTO

Sea el producto ab . Los logaritmos de a y b son, respectivamente, x e y . Se tiene:

$$a = 10^x \quad (1)$$

$$b = 10^y \quad (2)$$

Multipliquemos ahora el miembro (1) y el (2):

$$ab = 10^x * 10^y = 10^{x+y}.$$

De donde:

$$\text{Log } ab = x + y.$$

Luego: *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.*

Por ejemplo, siendo $\text{Log } 2 = 0.3010$ y $\text{Log } 6 = 0.7782$, el logaritmo de 12 es:

$$\text{Log } (2*6) = \text{Log } 2 + \text{Log } 6 = 1.0792.$$

2. LOGARITMO DE UN COCIENTE

Sea la división $a:b$. Dividiendo (1) y (2).

$$a/b = 10^x / 10^y = 10^{x-y}. \text{ De donde :}$$

$$\text{Log } (a/b) = \text{Log } a - \text{Log } b.$$

El logaritmo de un cociente es igual a la resta del logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

Por ejemplo, el logaritmo de 8:

$$8 = 24/3$$

$$\text{Log } 24 = 1.3802$$

$$\text{Log } 3 = .4771$$

$$\text{Entonces: } \text{Log } (24/3) = \text{Log } 24 - \text{Log } 3 = 1.3802 - .4771 = .9031$$

3. LOGARITMO DE UNA POTENCIA

Sea para obtener el logaritmo de a a m :

$a^m = a \cdot a \cdot \dots m \text{ veces} \cdot a$. Tomando el logaritmo de a .

$\text{Log } a^m = \text{Log } a + \text{Log } a + \text{Log } a \dots m \text{ veces} \dots \text{Log } a = m \text{ Log } a$. De donde queda que:

El logaritmo de una potencia es igual a logaritmo de la base por el coeficiente del exponente.

4. LOGARITMO DE UNA RAIZ

Probaremos obtener el logaritmo de $a^{1/n}$, que es un radical.

$\text{Log } a^{1/n} = 1/n \text{ Log } a = \text{Log } a/n$. Luego:

El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido por el coeficiente de la raíz.

9. COLOGARITMO

Si se hiciera la siguiente operación por logaritmos:

$C = 12.37/459.7$, donde C representa el cociente. Se tendría:

$\text{Log } C = \text{Log } 12.37 - \text{Log } 459.7$. Lo cual se puede escribir:

$\text{Log } C = \text{Log } 12.37 + \text{Log } 1/459.7$.

El logaritmo del inverso de 459.7 es su cologaritmo.

*El **COLOGARITMO** de un número es el logaritmo del recíproco de este número*

Para hallarse el cologaritmo de un número se busca el logaritmo del número. A la característica se le suma 1 y se la cambia de signo; la mantisa se obtiene restandole a 1 la mantisa de su logaritmo.

10. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación exponencial es aquella donde intervienen incógnitas como exponentes.

Así, $a^x = b$, es una ecuación exponencial. Para resolverlas se utilizan las propiedades de los logaritmos. Por ejemplo resolvamos $5^x = 20$

1. Aplicamos la propiedad del logaritmo de un exponente

2. Se despeja a X .

$x \log 5 = \log 20$

$x = \log 20 / \log 5$

$x = 1.3010 / .6990 = 1.891$